Exercice 1 : Analyse spectrale

1. Rappeler la condition (ou théorème ou encore critère) de Nyquist-Shannon.

2. Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser pour visualiser les spectres des signaux suivants

Nom du signal	Forme mathématique
Signal 1	$s_1(t) = A\sin(2\pi \times 1000t)$
Signal 2	$s_2(t) = A\sin(2\pi \times 10t)$
Somme 1 et 2	$s_3(t) = A\,[\sin(2\pi \times 1000t) + \sin(2\pi \times 10t)]$
Produit 1 et 2	$s_4(t) = B[\sin(2\pi \times 1000t)\sin(2\pi \times 10t)]$
Carré	$s_5(t) = Bsin^2(2\pi \times 1000t)$

3. Pour le signal $s_4(t)$, déterminer le temps d'acquisition minimum et le nombre d'échantillons minimal qui permettront de distinguer toutes les composantes du spectre.

On étudie maintenant des signaux décrits par leur décomposition en série de Fourier.

4. On considère un signal triangulaire d'amplitude A dont la décomposition en série de Fourier est donnée par : $s_6(t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2\pi \times 1000(2k+1)t)$. Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser si l'on peut se permettre de négliger les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à *1%* de celle du fondamental.

5. A l'aide d'un oscilloscope numérique, on visualise le spectre d'un signal rectangulaire de fréquence $f_0 = 4\ kHz$ et d'amplitude A. Ce signal a été échantillonné à la fréquence $f_e = 30\ kHz$. Sa décomposition en série de Fourier est : $s_7(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2\pi(2k+1)f_0t)$. La condition de Nyquist-Shannon est-elle vérifiée pour ce signal? Discuter. Faire une représentation du spectre obtenu afin d'étayer votre propos.

Exercice 2 : Filtrage

On considère un filtre analogique passe-bas du premier ordre qui agit sur un signal $e(t)$ pour fournir en sortie un signal $s(t)$.

1. Rappeler la forme de la fonction de transfert de ce filtre en régime harmonique sachant que sa fréquence de coupure est notée f_c.

2. On considère maintenant le filtre numérique associé à ce filtre passe-bas. La période d'échantillonnage des signaux est T_e. L'équation permettant de déduire la valeur de la sortie, à une date donnée, en fonction de l'état de l'entrée et de la sortie à l'instant précédent se met sous la forme :

$s_{n+1} = s_n + 2\pi\beta(e_n - s_n)$(**formule que vous corrigerez si nécessaire**). Exprimer β en fonction de f_c et de T_e.

3. On prend $\beta = 1/10$. Déterminer la fréquence de coupure de ce filtre pour une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz, puis de 10 kHz. Quelle conclusion peut-on en tirer par rapport à un filtre analogique ?

4. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f_e = 10\ kHz$ alors que le signal est donné par $e(t) = Asin(2\pi f_e t)$. On suppose que la date $t = 0$ correspond au premier échantillon e_0. On suppose de plus que $s_0 = 0$. Déterminer les valeurs de s_n. Le résultat était-il prévisible ? On suppose maintenant que la première prise d'échantillon s'effectue à une date $t \neq 0$ tout en restant inférieure à la demi-période du signal. Déterminer les valeurs de s_n et commenter.

5. Même question lorsque le signal est $e(t) = Acos(2\pi f_e t)$.

6. En pratique, comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonnage pour éviter les problèmes mis en évidence avant.

Exercice 3 : Convertisseur Numérique-Analogique

Afin d'écouter la musique d'un CD audio, on envoie la sortie numérique donnée par le lecteur CD ou, l'ordinateur à l'entrée d'un haut-parleur. Le haut-parleur fonctionnant avec un signal analogique, un CNA 4 bits à résistances pondérées est utilisé, voir le schéma de la figure 1. Il est constitué d'une tension E constante de référence, de 4 résistances $R_n = R/2^n$ pour $0 \leq n \leq 3$ et 4 interrupteurs $\varepsilon_n = 0$ ou 1 où 1 représente un interrupteur fermé et 0 un interrupteur ouvert. Un code 1101 signifie que $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 1$. Un convertisseur courant-tension donne la tension U_g qui alimente le haut-parleur. On donne la caractéristique entrée-sortie du convertisseur : il se comporte en sortie comme un générateur de tension parfait de fem $U_g = R'i$ tant que la tension de saturation n'est pas atteinte. Il sature à $V_{sat} = 15V$ ensuite.

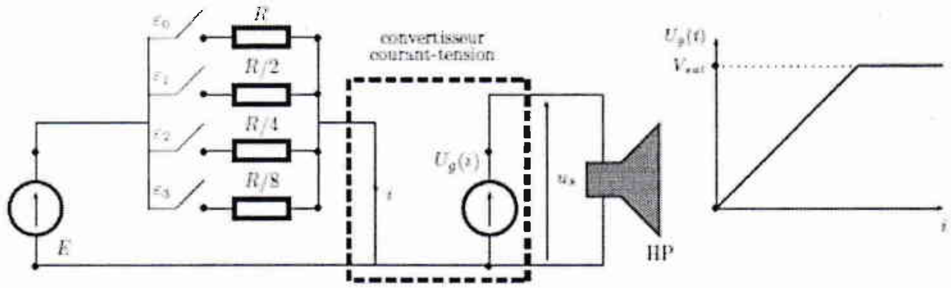


Figure 1 : Convertisseur Numérique-Analogique et convertisseur courant-tension

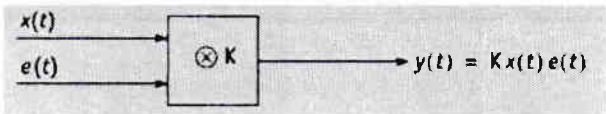
1. Déterminer l'intensité du courant circulant dans la résistance R_n en fonction de ε_n, R et E. En déduire la tension u_s. Commenter le résultat obtenu.
2. On choisit dans un premier temps $R = R'$ et $E = 1V$. Calculer la valeur de la tension correspondant à 0000, 0001, 0010, 0011 et 0100. Calculer également la tension de sortie maximale. Commenter.
3. En réalité, le signal audio est enregistré sur un CD avec 16 bits. On place donc en parallèle 16 résistances de valeur $R_n = R/2^n$. Calculer la valeur maximale obtenue en sortie. Que pensez-vous de la situation ? Proposer des solutions.

Exercice 4

1) Numérisation d'un signal analogique *x(t)*

A cet effet, le signal x(t) est traité selon le principe suivant (voir schema).
L'opérateur ⊗K réalise l'opération multiplication des signaux $x(t)$ et $e(t)$ (K est une constante positive).
$e(t)$ est un signal périodique lié à une horloge lui imposant une période T_H. Ainsi :

$$\begin{cases} e = E_0 \ \ pour \ \ nT_H - \dfrac{\tau}{2} \leq t \leq nT_H + \dfrac{\tau}{2} \\ \qquad e = 0 \ \ autrement \end{cases}$$



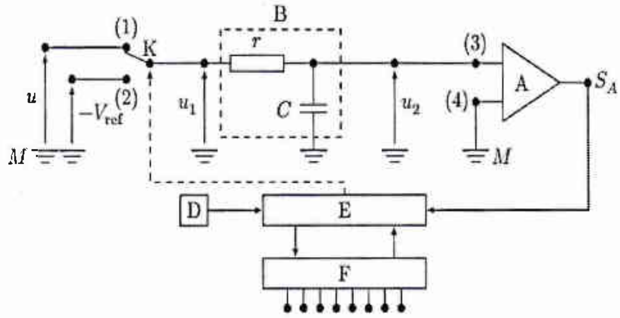
L'étude qui suit prend pour exemple un signal source sinusoidal : $x(t)=a\sin\omega' t$ avec $\omega'=2\pi f'$.
A.N. $E_0 = 1V$; $a = 5V$; $T_H = 0{,}1$ ms ; $\tau = 10$ µs ; $f' = 1$kHz et $K=2$.
1.a) Expliquer qualitativement comment s'effectue la numérisation du signal $x(t)$
1.b) Montrer que le signal de sortie y(t) peut être considéré comme la superposition de composantes sinusoïdales.

2) Restitution du signal source

Le signal numérisé est transformé par un CNA en un signal analogique $z(t)$ semblable au signal $y(t)$ étudié au 1) (on prendra $z(t) = y(t)$). Pour récupérer le signal source $x(t)$, on réalise un filtrage du signal $z(t)$. On considère un filtre passe-bas idéal. Montrer qu'un filtrage efficace nécessite une fréquence d'échantillonnage f_H supérieur à une valeur limite que l'on déterminera en fonction de f'.

Exercice 5 : Numérisation

Figure 2



Dans tout système de stockage numérique de données, la première étape est celle de la numérisation. Les signaux du monde réel sont analogiques, pour les transformer en signaux numériques on utilise un convertisseur analogique numérique, noté CAN par la suite.

I.A – Au cœur de tous les convertisseurs se trouve un compteur (noté F sur la Figure 2), commandé par un signal d'horloge (noté D) qui incrémente le compteur à chaque bip d'horloge (le compteur est lui-même commandé par une logique de commande notée E). La fréquence du signal d'horloge est de l'ordre de quelques GHz, on la suppose parfaitement stable. Le compteur compte à partir de zéro, dès que la commande de compter lui a été donnée, au rythme imposé par le signal d'horloge. Il fournit en sortie un nombre codé sur N bits.

I.A.1) Quelle est la plus petite durée mesurable (précision maximale) à l'aide d'un compteur dont le signal d'horloge a une fréquence $f_{ck} = 1$ GHz ?

I.A.2) L'architecture des premiers **CAN** était de type « série », elle est modélisée par le dispositif schématisé sur la **Figure 2**. La tension positive u dont la valeur est comprise entre 0V et V_{ref} ($V_{ref} = 2$V), supposée constante pendant la durée de la numérisation, est convertie en un nombre S_N.

Le convertisseur est composé d'un circuit r, C formant le bloc **B**, d'un comparateur **A**, et d'éléments intégrés parmi lesquels le bloc logique de commande **E**, le générateur de signal d'horloge **D** et le compteur sur N bits **F**.

Les résistances d'entrée des blocs **A**, **E** et **F** sont infinies.

Le module **A** compare les potentiels des nœuds **(3)** et **(4)**. Lorsque $V_{(3)} > V_{(4)}$, son potentiel de sortie V_{SA} est au niveau haut, de sorte que $v_{SA} = V_{SA} - V_M = 5\ V$. Lorsque $V_{(3)} < V_{(4)}$, son potentiel de sortie est au niveau bas ($v_{SA} = 0\ V$). Il commande ainsi le bloc logique **E**.

L'interrupteur **K** est commandé par le bloc logique **E**, ce qui est symbolisé par un trait pointillé.

a) Préciser ce qu'on appelle masse dans un montage électrique.

b) Représenter le graphe de la tension $v_{SA} = V_{SA} - V_M$ en fonction de u_2.

I.A.3) Partant d'une situation où le condensateur est déchargé, **E** commande à l'instant t = 0 la mise en position **(1)** de l'interrupteur **K**. L'interrupteur reste dans cette position pendant une durée $t_1 = \frac{2^n - 1}{f_{ck}}$ qui correspond à un cycle complet de comptage du compteur sur N bits. Étudier u_2 en fonction du temps entre t = 0 et t_1. Faire apparaître une constante τ, homogène à un temps, caractéristique du bloc **B**.

I.B – Pour toute la suite, on choisit les valeurs de r et C de sorte que $t_1 \ll \tau$.

I.B.1).

a) Donner alors l'expression simplifiée de u_2 en fonction du temps, ainsi que le lien simplifié entre u_1 et $\frac{du_2}{dt}$.

b) Quelle est alors la fonction du bloc **B** ?

c) Que vaut v_{SA} entre 0 et t_1?

I.B.2) Le bloc de commande fait basculer l'interrupteur K en position **(2)** à l'instant t_1 et déclenche le comptage. Celui-ci dure jusqu'à l'instant $t_1 + t_2$ tel que le signal v_{SA} soit modifié.

a) Exprimer t_2 en fonction de u, t_1 et V_{ref}.

b) Représenter sur un même graphe u_2 et u_1 en fonction du temps, entre t = 0 et $t_1 + t_2$.

I.B.3) Quelle est la durée maximale de la conversion analogique numérique pour un convertisseur 8 bits commandé par un signal d'horloge de fréquence f_{ck}= 1 GHz ?
En déduire une condition sur la fréquence des signaux qu'on peut numériser avec un tel convertisseur. Commenter.

I.C – Les convertisseurs plus récents ont une architecture parallèle.
La **Figure 3** représente un convertisseur 3 bits, qui convertit une tension u qui vérifie
$0 < u < V_{ref}$. Il est composé de 7 comparateurs, d'une logique de commande et de résistances de valeur r, 2r et 3r. Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et délivrent un signal logique qui est au niveau haut lorsque la patte reliée à u a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à V_{ref} par l'intermédiaire des résistances.

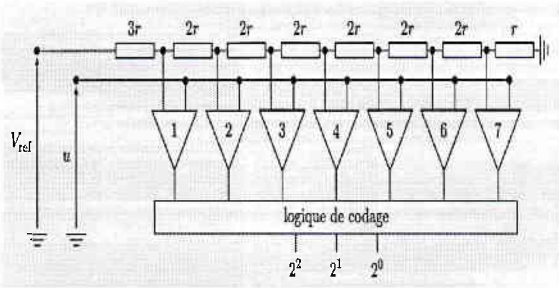


Figure 3

I.C.1) Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur.
I.C.2) Pour un convertisseur 8 bits, combien faut-il de comparateurs ?

Exercice 6 : Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e. La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de f_e = 44100Hz, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1) Les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz.
1.a) Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ?
1.b) La fréquence f_e = 44100Hz est-elle compatible ?
2) On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence f_1 = 43 000 Hz est présent lors du concert.
2.a) Ce sont est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après l'échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?
2.b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur pour résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.
2.c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un suréchantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.
3) On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.
3.a) Sachant que l'enregistrement s'effectue à f_e = 44100 Hz sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc deux sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?
3.b) Quelle durée de concert peut-on enregistrer sur le CD de 700 Mo ? On rappelle que 1 octet vaut 8 bits.
3.c) Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois, et enlève les signaux peu audibles. Le taux de compression peut aller de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?

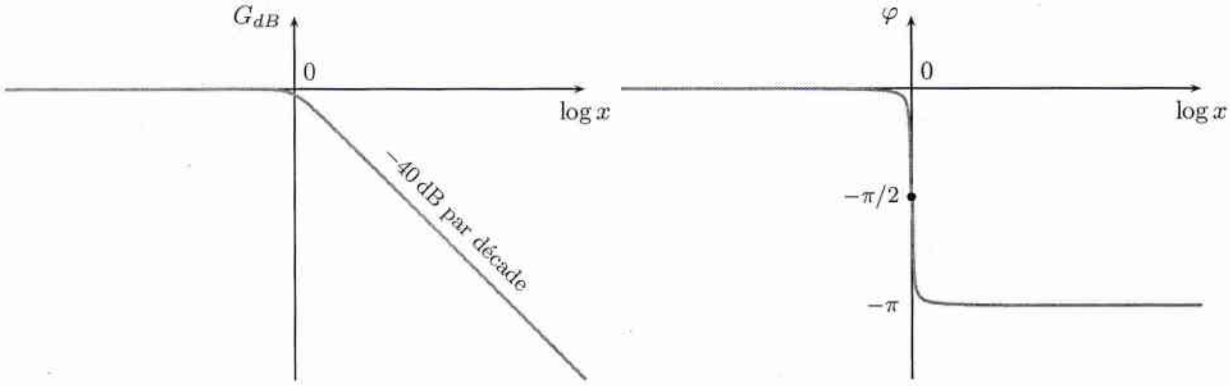


FIGURE 3 – Diagramme de BODE du filtre

puisque $d(t) = kaA_m \cos 2\pi f_m t$. Comme k et a sont connus, on peut isoler $\boxed{A_m \cos 2\pi f_m t}$ qui représente le signal audio porteur de l'information.

Problème nº 3 – Électronique numérique *2015*

A. Analyse spectrale : Exercice 1

1. La condition de SHANNON impose que la fréquence d'échantillonnage soit $\boxed{\text{au moins 2 fois supérieure}}$ à la plus haute fréquence présente dans le signal traité.

2. Pour $s_1(t)$, il faut utiliser une fréquence supérieure ou égale à 2 kHz alors que pour le signal $s_2(t)$, il s'agit de 20 Hz. Pour le signal somme, il faut trouver la plus haute fréquence qui est, bien évidemment, celle de $s_1(t)$. Il faut donc au moins 2 kHz. Nous savons que le produit de deux fonctions sinusoïdales engendre des signaux dans les fréquences sont la somme, d'une part, et la différence, d'autre part, des fréquences présentes. Le signal $s_4(t)$ comporte donc les fréquences 990 Hz et 1 010 Hz. Il faut donc une fréquence $\boxed{f_e \geq 2\,020\,\text{Hz}}$. Quand au carré, il respecte la même loi que nous venons d'évoquer. Il comporte une composante continue de fréquence nulle - qui correspond à la différence - et une composante de fréquence 2 kHz - qui correspond à la somme. Il faut donc maintenant une fréquence d'échantillonnage $\boxed{f_e \geq 4\,\text{kHz}}$.

3. Pour le signal $s_4(t)$, les deux fréquences sont séparées de $\Delta f = 20\,\text{Hz}$. Il faut donc que la précision de l'analyse de FOURIER soit inférieure à $\Delta f/2$. Or, nous savons que l'intervalle de temps total t_a d'acquisition du signal est l'inverse de la précision du spectre. On a donc $t_a = \frac{2}{\Delta f} = 0,1\,\text{s}$. Comme on doit échantillonner au minimum à 2 020 Hz, il faut au minimum $\boxed{\text{202 échantillons}}$.

4. Dans le signal triangulaire, seules sont présentes les harmoniques de rang impaire. Pour avoir une amplitude inférieure à 1% par rapport au fondamental, il faut aller au-delà de l'harmonique 9 qui correspond à $k = 4$ puisque $9^2 = 81$ alors que pour la suivante $11^2 = 121$. La plus haute fréquence à échantillonner correctement est donc $f_9 = 9\,\text{kHz}$, il faut donc une fréquence d'échantillonnage $\boxed{f_e \geq 18\,\text{kHz}}$.

5. On peut répondre aisément qu'avec un tel signal qui comporte des fréquences en $(2k+1)f_0$ avec $k \to \infty$, il est impossible de trouver une fréquence d'échantillonnage qui respecte parfaitement le signal. Le problème est le même qu'à la question précédente, il faudra prendre en compte le niveau de précision que l'on souhaite atteindre pour définir une telle fréquence. Nous avons vu qu'échantillonner par un signal de fréquence f_e revient à multiplier le signal à traiter par une somme de sinusoïdes de fréquences nf_e avec $n \in \mathbb{N}$ (peigne de DIRAC). Le spectre du signal échantillonné contiendra donc les fréquences $\boxed{nf_e \pm (2k+1)f_0}$. Le spectre est très riche, trop d'ailleurs. Beaucoup de fréquences apparaissent et elles sont notables - en tout cas pour les premières harmoniques -. Le phénomène de repliement du spectre se produit rapidement. En effet, le signal comporte les fréquences 4 kHz, 12 kHz, 20 kHz... alors que le peigne de DIRAC lui possède une composante continue 0 Hz, 30 Hz, 60 Hz... Prenons le cas du fondamental du signal : une fois échantillonné il comporte les fréquences 4 kHz, $30 - 4 = 26$ kHz, $30 + 4 = 34$ kHz, 56 kHz, 64 kHz... Ce fondamental respecte la condition de SHANNON et on peut le récupérer avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure inférieure à 26 kHz. Pour l'harmonique 3 échantillonnée, on trouve 12 kHz, $30 - 12 = 18$ kHz, 42 kHz, 48 kHz, 72 kHz... Il y a toujours respect de la condition de SHANNON et on peut récupérer avec un filtre passe-bas de coupure à 18 kHz, cette harmonique et le fondamental. Mais on sent tout de suite que le marge se réduit. Avec l'harmonique 5, on ne respecte plus la condition de SHANNON. On a 20 kHz, $30 - 20 = 10$ kHz !, 50 kHz, $60 - 20 = 40$ kHz !, 80 kHz... Le repliement de spectre se voit très bien avec l'apparition de la fréquence de 10 kHz. Avec le filtre passe-bas évoqué avant, on pouvait espérer récupérer correctement 4 kHz et 12 kHz maintenant ce n'est plus le cas avec cette fréquence de 10 kHz. Même si son amplitude est plus faible que celles de 4 kHz et 12 kHz, le signal est détérioré. Plus le signal présentera des évolutions rapides comme c'est particulièrement le cas avec un créneau, plus il faudra échantillonner à une fréquence grande voire très grande par rapport à la fréquence de ce signal.

B. Filtrage

6. Un filtre analogique de fréquence de coupure f_c possède la fonction de transfert $\boxed{\underline{H}(jf) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+jf/f_c}}$.

7. D'après la fonction de transfert précédente, on a $\underline{s}(1+j\frac{f}{f_c}) = \underline{s}(1+j\frac{\omega}{2\pi f_c}) = \underline{e}$. On passe à l'équation différentielle associée : $\frac{1}{2\pi f_c}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = e$. La numérisation consiste à assimiler la dérivée au taux de variation pendant la durée d'échantillonnage T_e. On a donc : $\frac{1}{2\pi f_c}\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e} + s_{n+1} = e_{n+1}$. On a donc bien une relation de la forme $s_{n+1} = s_n + 2\pi\beta\,(e_{n+1} - s_{n+1})$ avec $\boxed{\beta = f_c T_e}$.

8. La fréquence de coupure de ce filtre pour une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz est $\boxed{f_c = 100\,\mathrm{Hz}}$. Pour l'autre fréquence proposée, on trouve $f_c = 1\,\mathrm{kHz}$. On constate donc que la fréquence de coupure du filtre numérique est dépendante de la fréquence d'échantillonnage. C'est une différence importante par rapport à un filtre analogique où cette fréquence était intrinsèque au filtre. Toutefois, cela ne doit pas être une grande surprise à partir du moment où dans la dérivée on fait apparaître la période d'échantillonnage T_e.

9. On constate que l'on ne respecte pas la condition de SHANNON car la fréquence du signal est égale à la fréquence d'échantillonnage. On commence par observer que $e_0(t=0) = 0$ et $e_1(t=T_e) = 0$. La relation de récurrence est $s_{n+1} = s_n + 2\pi\beta\,(e_{n+1} - s_{n+1})$. Comme on a $s_0 = 0$, on voit immédiatement que $s_1 = 0$ mais comme $e_n = 0\ \forall n$, on aura $\boxed{s_n = 0\,\forall n}$. Cela était prévisible car le signal est périodique et comme l'échantillonnage a exactement la même période que le signal, il saisit toujours la même valeur en l'occurrence 0. On voit donc un signal constant, une composante continue de fréquence nulle. C'est cohérent avec le fait que la fréquence de coupure du filtre est de 1 kHz alors que le signal possède la fréquence de 10 kHz. Si le premier échantillon ne correspond pas à $t = 0$ mais à une valeur non nulle, $e_n = e_0 \neq 0\ \forall n$. La relation de récurrence est $s_{n+1} = \frac{1}{1+2\pi\beta}s_n + \frac{2\pi\beta}{1+2\pi\beta}e_{n+1}$. Avec la condition initiale $s_0 = 0$, on trouve $s_1 = ae_0$ avec $a = \frac{2\pi\beta}{1+2\pi\beta}$ et ensuite $s_2 = rs_1 + ae_0$ où $r = \frac{1}{1+2\pi\beta} < 1$ ce qui donne $s_2 = ae_0(1+r)$, on trouve facilement ensuite que $s_n = ae_0\left(1 + r + r^2 \ldots + r^{n-1}\right) = ae_0\frac{1-r^n}{1-r}$. Assez rapidement sur un grand nombre d'échantillons, on peut dire que $s_n = ae_0\frac{1}{1-r}$. On constate que $\frac{a}{1-r} = 1$ et donc que l'on va atteindre $s_n = e_0$. Il se produit un régime transitoire où la valeur de la sortie passe de 0 à progressivement à la valeur e_0 puis reste constante. Ce comportement se rapproche quand de celui du filtre analogique auquel on mettrait en entrée un signal constant (échelon de HEAVISIDE), après le régime transitoire exponentiel classique, la sortie fournit le signal d'entrée.

10. Cela ne change pas grand chose au problème, on retombe exactement dans les deux $\boxed{\text{mêmes cas}}$ de figure que précédemment.

11. Il faut simplement assurer la condition de SHANNON et même faire mieux avec $\boxed{f_e \gg f_s}$.

C. Convertisseur Numérique-Analogique

12. On obtient facilement $\boxed{i_n = \varepsilon_n 2^n \frac{E}{R}}$ puisqu'il n'y a qu'un générateur et une résistance en série. Pour tenir compte de l'ensemble des branches, il faut faire la loi des nœuds, c'est-à-dire sommer l'ensemble des intensités. On peut écrire que $i = \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n \frac{E}{R}$. La tension u_s est proportionnelle à l'intensité i tant que l'on évite la saturation. On va donc pouvoir écrire que $u_s = \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n \frac{R'}{R} E$ tant que $u_s < V_{sat}$.

13. Les valeurs de la tension de sortie sont fournies dans le tableau suivant.

Code d'entrée	Valeur décimale de la tension de sortie
0000	0 V
0010	2 V
0001	1 V
0011	3 V
0100	4 V

La tension maximale correspond à la valeur maximale de l'intensité lorsque tous les interrupteurs sont fermés. Cela correspond au code 1111, la tension est donc $\boxed{u_s = 1+2+4+8 = 15\,\mathrm{V}}$. On atteint à la limite la valeur de saturation V_{sat}. On peut considérer que les composants ont été bien choisis par conséquent.

14. Comme dans le cas précédent, la tension maximale est obtenue lorsque les 16 interrupteurs sont fermés. On doit donc sommer les puissances de 2 successives sur 16 termes. On a donc $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15} = \frac{1-2^{16}}{1-2} = 2^{16} - 1 = 65\,535$. La tension hypothétique serait de plus de 65 kV ! C'est évidemment impossible, il y a longtemps que le circuit électronique serait grillé par la circulation de courants beaucoup trop élevés. À moins que l'on mette une valeur suffisante pour $R/2^{15}$. À ce moment-là, il faudrait jouer sur la valeur de R' pour qu'à la limite on tombe sur la tension de saturation. On peut le faire en respectant $\frac{R'}{R}E(2^{16}-1) \leq V_{sat}$ qui donne la condition sur R' : $\boxed{R' \leq R\frac{V_{sat}}{(2^{16}-1)E}}$. Cette réponse suppose que l'on a une possibilité de réglage du convertisseur courant-tension. Dans le cas contraire, on se rabattra sur un réglage de E. On notera, pour terminer, que le montage utilisant des résistances $R/2^n$ sera selon toute vraisemblance peu précis car il est difficile de fabriquer des résistances très précises surtout sur des grandes gammes comme celle que l'on peut deviner avec la valeur de 2^{16}.

Commentaires

Points de cours

- *Décomposition en fréquence,*
- *Filtrage.*

Indications

- *Pour la détermination de $y(t)$, on pensera à décomposer le signal $e(t)$, signal T_H-périodique, en série de Fourier.*

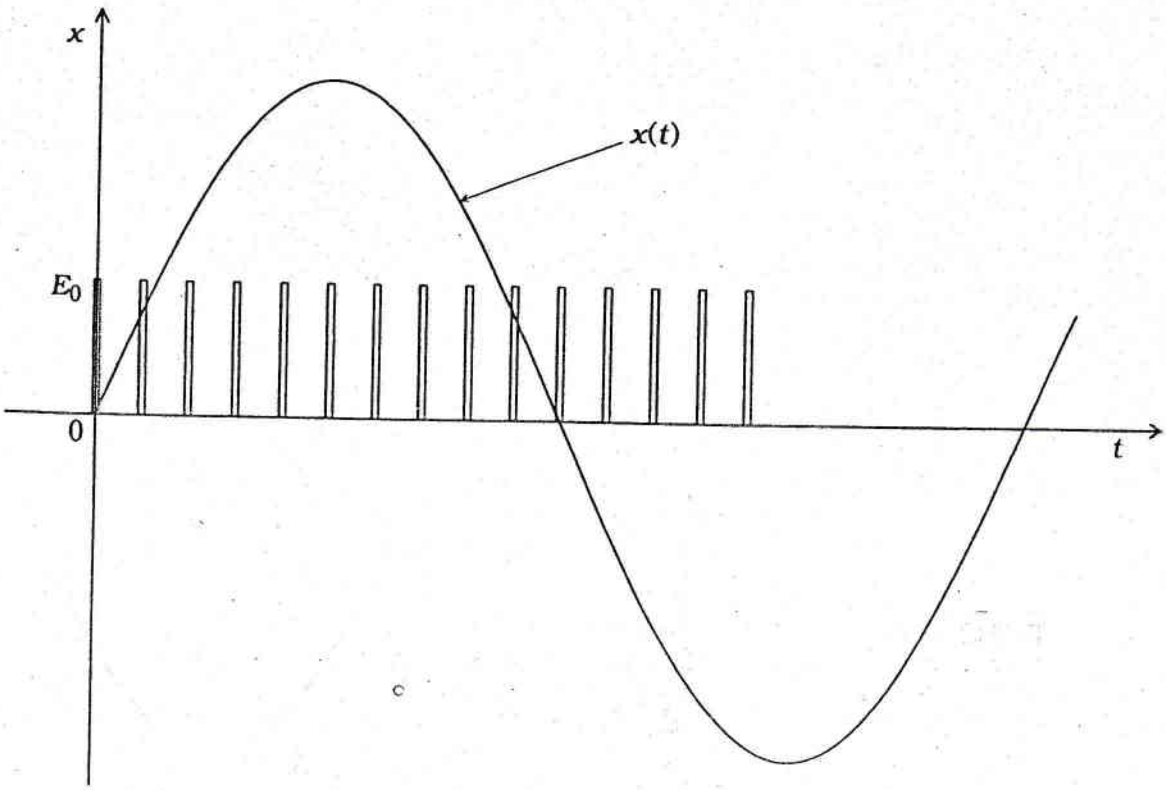
- *Le filtre passe-bas idéal laisse passer sans déformation et sans déphasage toutes les fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_C et supprime «toutes» les fréquences supérieures à f_C.*

Solution Exercice 3 4

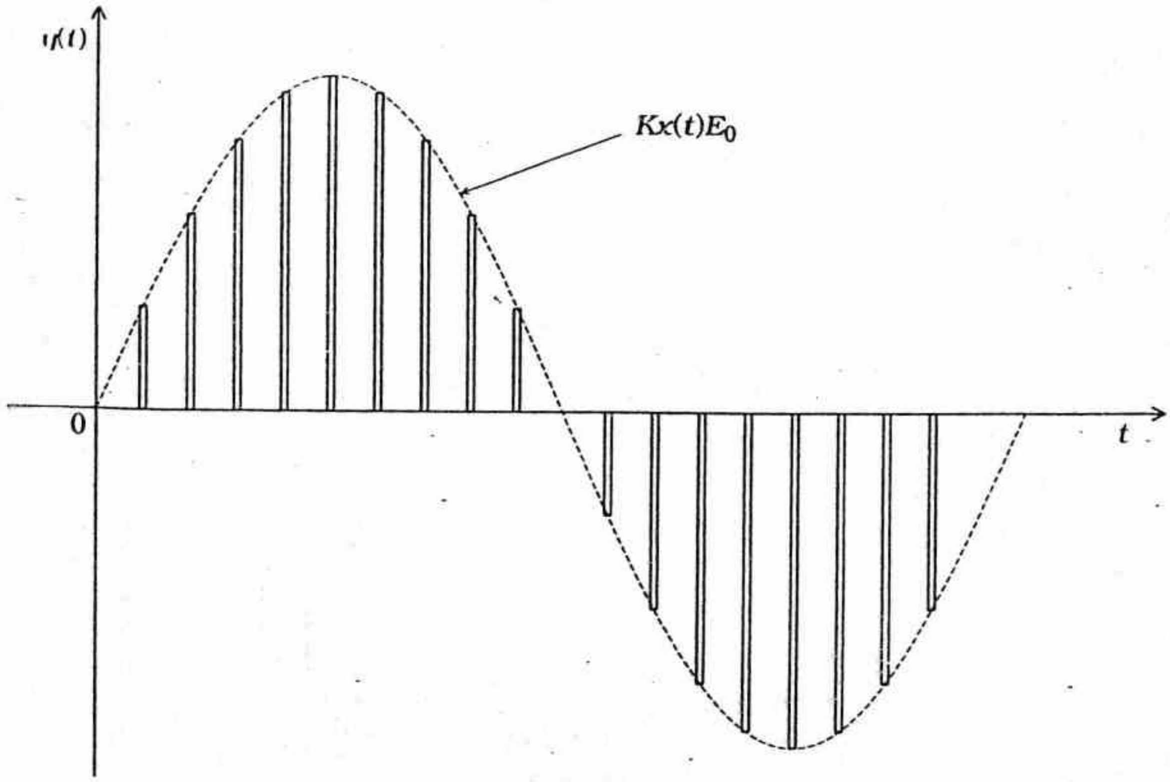
Première Partie : numérisation du signal $x(t)$

1) Représentons sur un même graphe les fonctions $x(t)$ et $e(t)$.

On a $f' = 1kHz$ soit $T' = 1ms$; $T_H = 0,1ms$ et $\tau = 10\,\mu s$.



Le signal $y(t)$ prend alors la forme :



Le signal de sortie $y(t)$ est constitué d'une suite de valeurs $y_n = KE_0x(nT_H)$, en considérant que τ est suffisamment petit pour que $x(t)$ soit pratiquement constant sur les intervalles d'échantillonnage $\left[nT_H - \frac{\tau}{2}, nT_H + \frac{\tau}{2}\right]$.

Il suffit alors de traiter cette suite $\{y_n\}$ de valeurs analogiques par un convertisseur analogique numérique (CAN) qui associera le nombre binaire Y_n à la grandeur y_n.

2) Le signal $e(t)$ périodique (période T_H) est décomposable en série de Fourier selon :

$$e(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\,\omega_H\,t) + B_n \sin(n\,\omega_H\,t) \quad \text{où} \quad \omega_H = \frac{2\,\pi}{T_H}$$

A_0 représente la valeur moyenne de $e(t)$. Or, sur une période T_H, $e(t)$ est non nul sur une durée τ où il prend la valeur constante E_0. Il vient alors :

$$\langle\, e(t)\,\rangle = A_0 = E_0\frac{\tau}{T_H}$$

De plus, la fonction $e(t)$ est paire, ce qui impose $B_n = 0$ pour tout n.

Quant aux coefficients A_n, ils se calculent classiquement de la façon suivante ($n \geqslant 1$) :

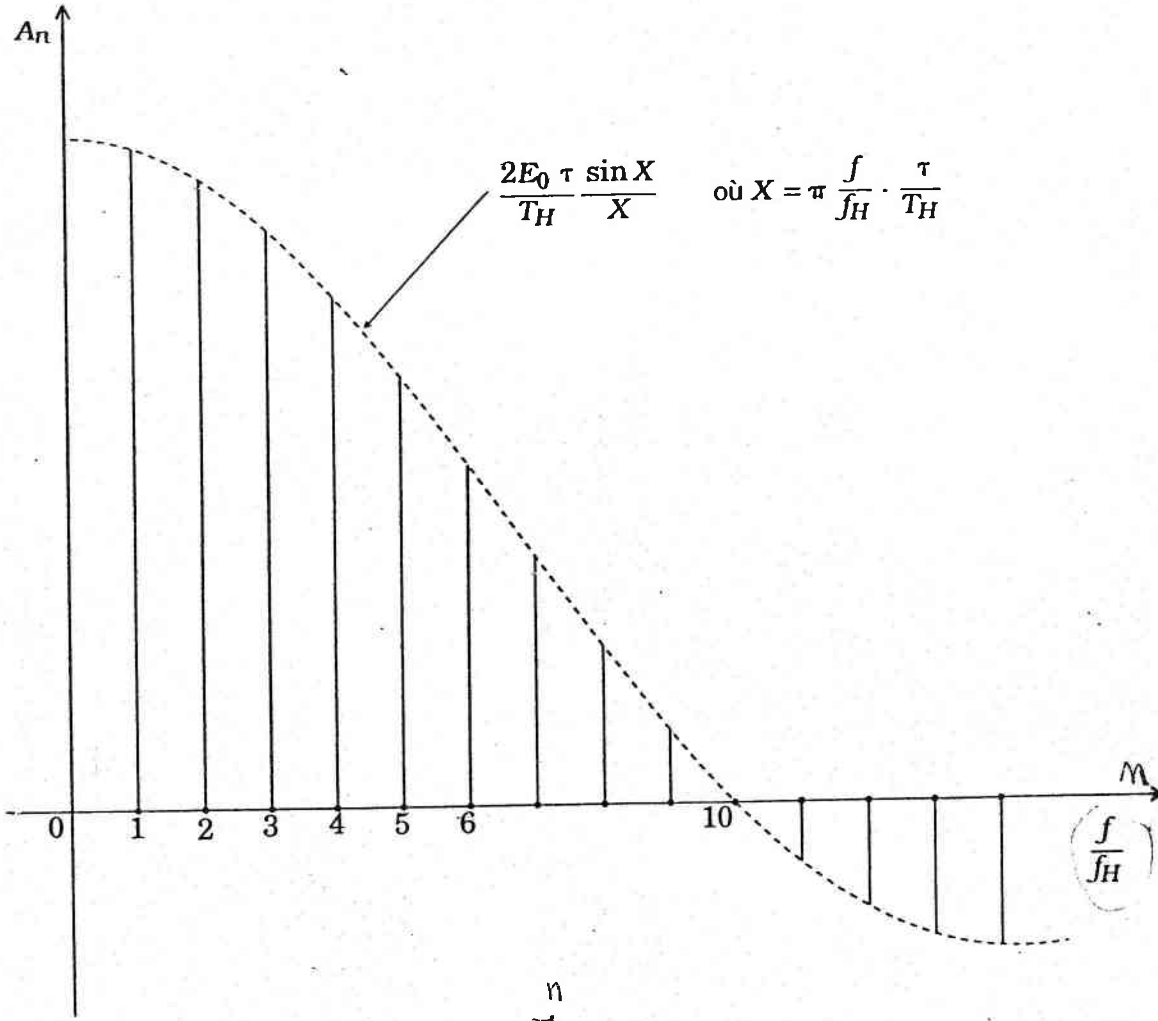
$$A_n = \frac{2}{T_H}\int_0^{T_H} e(t)\cos n\,\omega_H\,t dt$$

Soit ici : $A_n = \dfrac{2}{T_H}2\displaystyle\int_0^{\frac{\tau}{2}} E_0 \cos n\,\omega_H\,t dt = \dfrac{4E_0}{T_H n\,\omega_H}\sin\left(2\,\pi\,n\dfrac{\tau}{2T_H}\right)$

D'où : $A_n = \dfrac{2E_0}{n\,\pi}\sin\left(\pi\,n\dfrac{\tau}{T_H}\right)$

Représentons la suite des A_n sur un même graphe (spectre du signal $e(t)$). On a :

$$A_n = \frac{2E_0\,\tau}{T_H}\,\frac{\sin\left(\dfrac{n\,\omega_H\tau}{2}\right)}{\left(\dfrac{n\,\omega_H\tau}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad f_H = \frac{1}{T_H} = 10^4 Hz \ \text{ et } \ \frac{1}{\tau} = 10^5 Hz$$



n

On a bien $\sin X = 0$ pour $\pi\,\dfrac{f}{f_H}\cdot\dfrac{\tau}{T_H} = p\,\pi$, soit :

$$n: \quad \frac{f}{f_H} = p\frac{T_H}{\tau} = p\frac{10^{-4}}{10^{-5}} = p\cdot 10$$

Le signal $y(t)$ devient alors $(y(t) = Kx(t)e(t))$:

$$y(t) = K\,a\sin\omega'\,t\cdot\left\{A_0 + \sum_1^{\infty} A_n\cos n\,\omega_H\,t\right\}$$

$$y(t) = K\,a\,A_0\sin\omega'\,t + K\,a\sum_1^{\infty} A_n\cos n\,\omega_H\,t\sin\omega'\,t$$

Or $\cos n\,\omega_H\,t\sin\omega'\,t = \dfrac{1}{2}\left[\sin(n\,\omega_H + \omega')t - \sin(n\,\omega_H - \omega')t\right]$

Finalement, nous obtenons :

$$y(t) = K\,a\,A_0\sin\omega'_t + \frac{Ka}{2}\sum_1^{\infty} A_n\left[\sin(n\,\omega_H + \omega')t - \sin(n\,\omega_H - \omega')t\right]$$

Ce signal comprend :

- une composante de fréquence $f' = 1kHz$ et d'amplitude :

$$K\,a\,A_0 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{10^{-5}}{10^{-4}} = 1V$$

- deux composantes ($n = 1$) de fréquences respectives $f_H - f'$ et $f_H + f'$ (9 et $11kHz$) et d'amplitudes $\frac{K\,a}{2}A_1$, soit :

$$\frac{K\,a}{2}A_1 = \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{\pi}\sin\left(\pi\,\frac{10^{-5}}{10^{-4}}\right)\right] = 0,98V$$

- puis les couples de fréquences $\{nf_H - f', nf_H + f'\}$ pour $n > 1$ ...

Seconde partie : restitution du signal source

1) Un filtre passe-bas idéal, de fréquence de coupure f_c, sera caractérisé par une fonction de transfert :

$$\underline{H} = 1 \text{ pour } f \leqslant f_c \quad \text{et} \quad \underline{H} = 0 \text{ pour } f > f_c$$

Pour récupérer le signal $x(t)$, à un terme de proportionnalité près, il suffit de laisser passer la composante de fréquence f' et d'arrêter les composantes de fréquences :

$$nf_H - f' \quad \text{et} \quad nf_H + f'$$

On doit donc imposer :

$$f_c \geqslant f' \quad \text{et} \quad f_c < f_H - f'$$

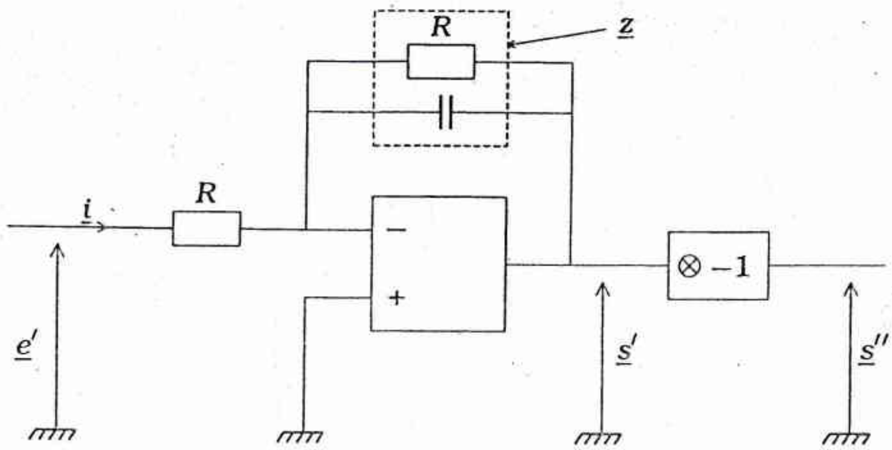
Soit encore $f' \leqslant f_c < f_H - f'$.

Cette double inégalité n'est possible que pour :

$$\boxed{f_H > 2f'} \qquad (\text{ici } f_H > 2kHz)$$

Il faut donc que la fréquence d'échantillonage f_H soit au moins égale au double de la fréquence f' du signal source.

2) Filtrage :



En associant l'admittance $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\,\omega$ au dipôle R parallèle à C, il vient :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}' - 0}{R} = \underline{Y}(0 - \underline{s}')$$

D'où : $\underline{s}' = -\frac{1}{R\underline{Y}}\underline{e}$ et $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ $(\underline{s}'' = -\underline{s}')$.

Il s'agit bien d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure :

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} \qquad \left(\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_C}} \right)$$

La composante de pulsation ω voit son amplitude multipliée par $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_C}\right)^2}}$

et sa phase se décaler d'un angle $\Psi = -\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{f}{f_C}\right)$.

Le système de filtrage envisagé ici réalise le cahier des charges pour :

- $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{f'}{f_C}\right) \leqslant 5°$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f'}{f_C}\right)^2}} \sim 1$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f_H - f'}{f_C}\right)^2}} \leqslant \dfrac{1}{10}$ (car $20 \log \dfrac{1}{10} = -20 dB$).

Les deux inégalités donnent :

$$f_C > \frac{1}{8,75\ 10^{-2}} \quad \frown \quad f_C > 11,4\ kHz$$

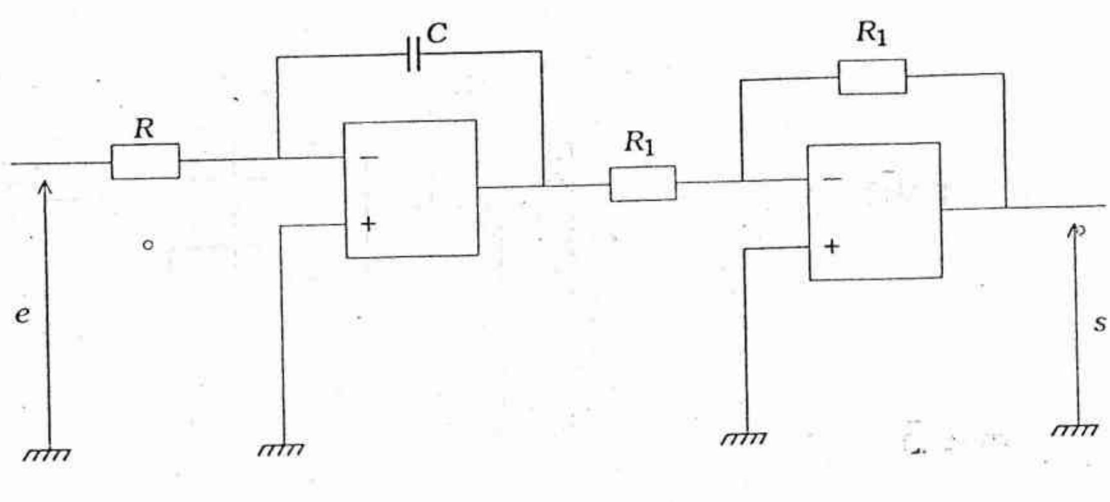
$$f_C < \frac{1}{\sqrt{99}}(f_H - f') \quad \frown \quad f_C < 0,90\ kHz$$

Ces résultats sont bien évidemment incompatibles.

Pour envisager un filtrage satisfaisant, on pourra chercher à augmenter l'ordre du filtre (ou) augmenter la fréquence d'échantillonnage f_H.

247 Divers

Première Partie

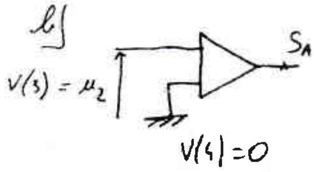


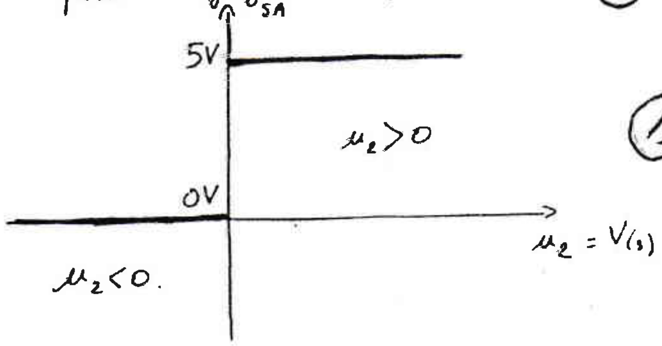
Exercice 3 : I- NUMERISATION 40

A] 1] La plus petite durée mesurable est $\boxed{10^{-9}s}$. C'est la précision maximale : $\boxed{1\ ns}$) 1

2] a] La masse est l'ensemble de tous les points portés au même potentiel, choisi nul par convention, c'est le point de référence des potentiels 1

b]

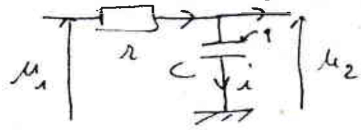




1

3] A $t = 0$ $\quad u_1 = u$

Bloc B : i 0 à cause de A qui a une résistance d'entrée infinie



1

$u_1 = ri + u_2$ et $u_2 = \frac{q}{c} = \frac{\int i\,dt}{c}$ d'où $i = C\frac{du_2}{dt}$.

d'où $rC\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$ 1

ESSM. $u_{2_0} = Ae^{-t/\tau}$ où $\tau = rC$ 1

SP $u_{2_p} = u_1 = u$ 1

SG $u_2 = u_1 + Ae^{-t/\tau}$.

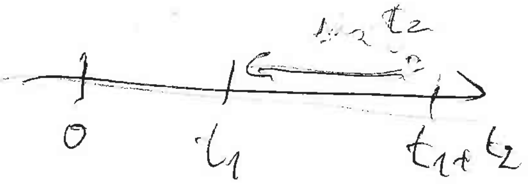
or à $t = 0$ $q = 0$ donc $u_2 = 0$ d'où $\boxed{u_2 = u(1 - e^{-t/\tau})}$

B] 1] a] Si $t_1 \ll \tau$ $e^{-t_1/\tau} = 1 - t_1/\tau$. et $\forall t < t_1$; $e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau}$) 1

d'où ($\boxed{u_2 = u\frac{t}{\tau}}$ ou $\boxed{\frac{du_2}{dt} = \frac{u_1}{\tau}}$) 1 1

b] B est un bloc intégrateur) 1

1/Exo 3



c) . u étant >0 $u_2(t_1) > 0$ donc $\boxed{v_{SA} = 5\,V}$ (1)

2) a) A $t = t_1$ $v_2 = u\,\frac{t_1}{\tau}$ (1)

$(t_2 << \tau)$ $\frac{du_2}{dt} = \frac{u_1}{\tau}$

A $t > t_1$ $u_1 = -V_{ref}$ d'où (en supposant $t_2 \ll \tau$)

$u_2(t) = \underbrace{u\,\frac{t_1}{\tau}}_{\text{ordonnée à l'origine} = u_2 \text{ initiale}} - V_{ref}\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right)$ pour respecter la C.I

pente $-\frac{V_{ref}}{\tau} = \frac{u_1}{\tau}$

parce que $\boxed{\frac{du_c}{dt} = \frac{u_1}{\tau}}$ reste vrai (1)

$u_2 = \text{cste} + \frac{u_1}{\tau}\,t$

$t = t_1$ $u_2 = \frac{u\,t_1}{\tau} = \text{cste} + \frac{u_1 t_1}{\tau}$

$\text{cste} = \frac{u\,t_1}{\tau} - u_1\frac{t_1}{\tau}$

$u_2 = \frac{u\,t_1}{\tau} + u_1\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t_1}{\tau}\right)$

$u_1 = -V_{ref}$

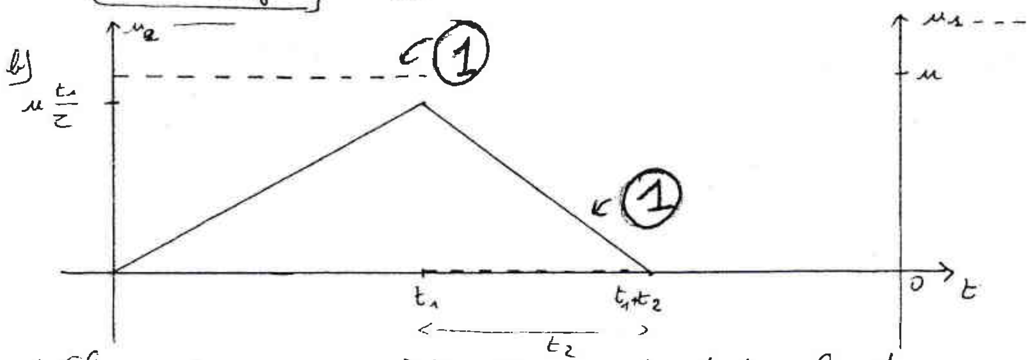
Soit $\boxed{u_2(t) = u\,\frac{t_1}{\tau} - \frac{V_{ref}}{\tau}(t - t_1)}$ (1)

t_1+t_2 est l'instant où u_2 devient ≤ 0.

$0 = u\,\frac{t_1}{\tau} - \frac{V_{ref}(t_2+t_1)}{\tau} + \frac{V_{ref}\,t_1}{\tau}$

$\boxed{t_2 = \frac{u\,t_1}{V_{ref}}}$ (1)

b)



c) Le compteur commence à t_1 et avance de 1 tous les $\frac{1}{f_{ck}}$

A t_2+t_1, il a avancé de $\frac{t_2}{1/f_{ck}} = \Delta_N$ (on prend la partie entière en fait $E(\ )$).

$\boxed{\Delta_N = E(f_{ck}\,(t_2))}$

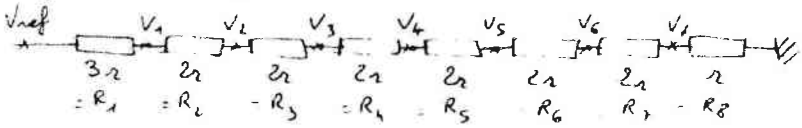
3) $(t_1+t_2)_{max} = 2t_1 = 2(2^N-1)/f_{ck}$ =0,51μs (Durée maximale) (1)

N = 8 f$_{ck}$ = 1 GHz Soit une période $f_{t\,min} = 2{,}0.10^6\,Hz$.

Or d'après le critère de Shannon-Nyquist, il faut $f_{éch} > 2 f_{signal}$. donc ici →

(1) $\boxed{\text{Signal} < 10\,\text{MHz}}$ C'est limité aux signaux basses fréquences (1)

C) 1) On va calculer V_1, V_2, V_3 V_7, les tensions de l'autre patte des comparateurs 1, 2, 7



On utilise la formule du pont diviseur de tension ($i_{entrée} = 0$ pour les comparateurs)

(7)

$$V_7 = V_{ref}\,\frac{R_8}{R_1+R_2+\ldots R_8} = V_{ref}\,\frac{r}{16r} \qquad V_7 = \frac{V_{ref}}{16}$$

$$V_6 = V_{ref}\,\frac{R_7+R_8}{R_1+R_2+\ldots R_8} \qquad V_6 = \frac{3}{16}V_{ref}$$

$$V_5 = \frac{5}{16}V_{ref} \qquad V_4 = \frac{7}{16}V_{ref}$$

$$V_3 = \frac{9}{16}V_{ref} \qquad V_2 = \frac{11}{16}V_{ref} \qquad V_1 = \frac{13}{16}V_{ref}$$

Chaque V_i : (1)

(1) (si $u > V_i$ le comparateur i a un potentiel de sortie au niveau haut (1) et si $u < V_i$ au niveau bas (0)) (1)
codage utilisé

Ainsi si $\frac{13}{16} < u/V_{ref}$ les comparateurs donnent 1 1 1 1 1 1 1 qui sera traduit en $7 = 2^2+2^1+2^0$

(8)

Chaque code : (1)

$\frac{11}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{13}{16}$	0 1 1 1 1 1 1	en $6 = 2^2+2^1$
$\frac{9}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{11}{16}$	0 0 1 1 1 1 1	en $5 = 2^2+2^0$
$\frac{7}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{9}{16}$	0 0 0 1 1 1 1	en $4 = 2^2$
$\frac{5}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{7}{16}$	0 0 0 0 1 1 1	en $3 = 2^1+2^0$
$\frac{3}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{5}{16}$	0 0 0 0 0 1 1	en $2 = 2^1$
$\frac{1}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{3}{16}$	0 0 0 0 0 0 1	en $1 = 2^0$
$0 < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{1}{16}$	0 0 0 0 0 0 0	en $0 = 0$

(1) (On fait donc une conversion sur 3 bits avec 7 comparateurs $= 2^3-1$

2) Il faut $2^8-1 = 255$ comparateurs (1)

EERCICE 4 : Prépas Science : physique mp-mp* ; p. 707 exo 21.4 ; cor. p.713

3/Exo 3

Finalement, l'intensité du courant dans la résistance R_n vaut donc : $\boxed{i_n = K_n 2^n \frac{E}{R}}$.

Appliquons ensuite la loi des nœuds puis obtenir i total : $i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = \sum_{n=0}^{3} K_n 2^n \frac{E}{R}$.

Or $u_s = U_g = R'i$, ce qui donne $u_s = R' \sum_{n=0}^{3} K_n 2^n \frac{E}{R}$ soit $\boxed{u_s = \frac{R'}{R} E \left(\sum_{n=0}^{3} K_n 2^n \right)}$.

0000	0 V
0001	1 V
0010	2 V
0011	3 V
0100	4 V
…	…
1111	15 V

$\left(\sum_{n=0}^{3} K_n 2^n \right)$ est une conversion binaire/décimale. Le code binaire est donc converti en analogique avec un signal proportionnel à la conversion décimale obtenue.

2. On a, avec les valeurs numériques données : $(R'/R)E = 1\,\text{V}$.

En appliquant la formule obtenue question précédente, on remplit le tableau ci-contre, qui illustre clairement la conversion binaire/décimale. Toutefois, U_g est à la limite de la saturation à 1111 (soit $15\,\text{V}$). Il est préférable de choisir les valeurs des composants de sorte à ce que la tension de sortie demandée soit strictement inférieure à V_{sat}.

3. Avec un échantillonnage à 16 bits, le convertisseur aura besoin de 16 résistances en parallèle. La valeur maximale est 1111111111111111 soit en binaire $\sum_{n=0}^{15} 2^n = \frac{2^{16}-1}{2-1} = 2^{16} - 1 = 65535$ (suite géometrique de raison 2). C'est évidemment une tension qui dépasse la tension de saturation en sortie.

4. Pour éviter ce problème, il faut que la plus grande tension demandée en sortie reste inférieure à V_{sat} soit : $u_s = \left(2^{16}-1\right) E \frac{R'}{R} < V_{\text{sat}}$ soit $\boxed{E < \frac{R}{R'} \frac{V_{sat}}{\left(2^{16}-1\right)}}$.

✐ *Ce montage est en réalité peu utilisé à cause de la difficulté à réaliser un réseau de résistances de valeurs $R/2^n$ très précises.*

Exercice 21.4 Exercice 6

1. Les fréquences audibles vont de $20\,\text{Hz}$ à $20\,\text{kHz}$. Le critère de Nyquist-Shannon impose au moins 2 points de mesure par période, soit une fréquence d'échantillonnage au moins double de la plus haute fréquence que l'on souhaite restituer. Ici donc : $f_{\text{échant}} \geq 2 \cdot 20\,\text{kHZ} = 40\,\text{kHz}$. La fréquence d'échantillonnage de $44{,}1\,\text{kHz}$ est compatible avec le critère de Nyquist-Shannon.

➪ *Méthode 21.1*

2. a) Un son de $f_1 = 43\,\text{kHz}$ n'est pas audible lors du concert. Par contre, il est susceptible d'être capté par le microphone. Or l'échantillonnage à f_e est à l'origine d'un repliement du spectre, et fait donc apparaître la fréquence $f' = |f_e - f_1| = 1100\,\text{Hz}$, qui se trouve dans le spectre audible ! Cette fréquence f' qui n'était pas présente lors du concert sera enregistrée et envoyée au haut-parleur lors de l'écoute du CD !

b) Un filtre passe-bas anti repliement de fréquence de coupure $f_c = f_e/2 = 22{,}5\,\text{kHz}$ est intercalé entre la sortie du microphone et le CAN. Il a pour rôle de supprimer toutes les fréquences susceptibles de se replier à plus basse fréquence (donc gênantes).

⇨ *Méthode 21.3.*

c) Le problème qui se présente maintenant est que l'on ne sait pas construire un passe-bas qui laisse passer toutes les fréquences inférieures à f_c et coupe entièrement les fréquences supérieures à f_c. Le risque est de commencer à filtrer les hautes fréquences audibles… et à l'inverse, de garder un peu de fréquences supérieures à $20\,\text{kHz}$ susceptibles de se replier !

C'est la raison pour laquelle la fréquence d'échantillonnage est en fait supérieure à $40\,\text{kHz}$: cela laisse une marge pour la transition.

→ les fréquences inférieures à $f_{\max} = 20\,\text{kHz}$ doivent passer à travers le filtre ;

→ les fréquences supérieures susceptibles de se replier en dessous de $20\,\text{kHz}$ doivent être coupées : ce sont les fréquences supérieures à $f_e - f_{\max} = 24{,}1\,\text{kHz}$.

Entre 20 et $24{,}1\,\text{kHz}$, cela n'a pas d'importance : elles ne sont pas audibles, et le repliement n'est pas audible non plus. C'est la zone de transition du filtre passe-bas.

Enfin, plus l'ordre du filtre est grand, plus il coupe rapidement les fréquences supérieures à $20\,\text{kHz}$.

3. a) La fréquence d'échantillonnage donne le nombre de mesures effectuées chaque seconde. Or chaque mesure contient 16 bits. Les 2 signaux du son stéréo occupent donc $N = 44\,100 \cdot 16 \cdot 2 = 1{,}41.10^6$ bytes, soit $\boxed{N = 1{,}41\,\text{Mb}}$ par seconde d'enregistrement.

b) La durée d'enregistrement possible sur un CD enregistrable du commerce de $700\,\text{Mo}$ (soit $700 \cdot 8\,\text{Mb}$) est : $t = (700 \cdot 8)/1{,}41 = 3970\,\text{s}$ soit $\boxed{\text{66 minutes}}$

⇨ *Méthode 21.1*

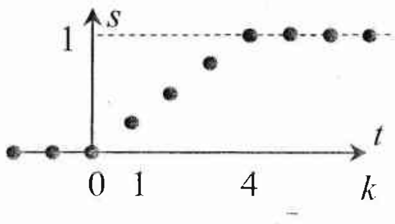
La durée d'enregistrement est un peu moins longue en réalité car on ajoute des bits de correction d'erreur qui permettent de corriger un peu le signal en cas de rayures… dans la limite du raisonnable !

c) Pour un format MP3, la durée d'enregistrement est multipliée par 4 à 20 : sur $700\,\text{Mo}$, il est alors possible d'enregistrer 4 à 20 heures de concert !

Exercice 21.5

1. Calculons les valeurs de s_k obtenues en réponse à un échelon de tension en remplissant le tableau ci-dessous (toutes les valeurs de tension sont en volt) :

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
e_k	0	0	0	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	0	1/4	1/2	3/4	1	1	1



Le signal d'entrée est constant pour $t \geq 0$ (signal continu donc fréquence nulle). Après un régime transitoire de durée $4\,T_e$, s atteint un régime établi non nul : le signal continu passe, donc les basses fréquences passent.

$$\frac{1}{2\pi f_c}\frac{ds}{dt} + s = e \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{s_{k+1} - s_k}{T_e}$$

$$\frac{1}{2\pi f_c}\frac{s_{k+1} - s_k}{T_e} + s_k = e \Rightarrow s_{k+1} - s_k + 2\pi f_c T_e s = 2\pi f_c T_e$$

$$\boxed{s_{k+1} = s_k + 2\pi f_c T_e (e_k - s_k)}$$

$$s_{k+1} = s_k + 2\pi\beta(e_k - s_k) \Rightarrow \beta = f_c T_e$$

3 - $f_e = 1\,kHz$ puis $f_e = 10\,kHz$

pour $f_e = 1\,kHz$, $f_c = \frac{\beta}{T_e} = \beta f_e = 0{,}1\,kHz = 100\,Hz$

pour $f_e = 10\,kHz$ $f_c = 1\,kHz$

4) $f_e = 10\,kHz$, $f_c = 1\,kHz$ et $\beta = 0{,}1$

$e(t) = A\sin(2\pi f_c t)$; $t=0$ $e(0) = 0$ et on suppose $s_0 =$

s_n ?

$s_1 = s_0 + 2\pi\beta(e_0 - s_0) = 0$ $\qquad n = 0$

$s_2 = s_1 + 2\pi\beta(e_1 - s_1) = 0$ $\qquad e_1 = e(T_e) = A\sin(2\pi f_c T_e) =$

$s_n = 0$ car $e_n = 0$

Si le premier terme $e_0 \neq 0$, $e_n = e_0 \neq 0$ $\forall n$

$$s_{k+1} = (1 - 2\pi\beta)s_k + 2\pi\beta e_0 \qquad \beta = 0{,}1 \quad 1 - 2\pi\beta > 0$$

posons $a = 1 - 2\pi\beta > 0$. $0 < a < 1$

$s_{k+1} = a s_k + 2\pi \beta e_0$ $\qquad b = 2\pi\beta e_0$

$s_{k+1} = a s_k + b$

$k=0 \quad s_1 = a s_0 + b = b . \qquad s_0 = 0$

$k=1 \quad s_2 = a s_1 + b = ab + b = b(a+1)$

$k=2 \quad s_3 = a s_2 + b = a \times b(a+1) + b$

$s_3 = b(a^2 + a + 1)$

$k=3 \quad s_4 = a s_3 + b = a\, b(a^2+a+1) + b$

$s_4 = b(a^3 + a^2 + a + 1)$

$s_n = b(\underbrace{a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1}_{\text{suite géométrique de raison } a \text{ et premier terme } 1})$

$s_n = b \dfrac{1-a^n}{1-a}$

Assez rapidement ↕ sur un grand nombre d'échantillon (n grand)

$a^n \to 0 \qquad s_n = \dfrac{b}{1-a}$

$s_n = \dfrac{2\pi\beta e_0}{1-(1-2\pi\beta)} = \dfrac{2\pi\beta e_0}{2\pi\beta} = e_0$

Il se produit un régime transitoire où la valeur de la sortie passe de 0 à progressivement à la valeur e_0 puis reste constante.

5: $e = A\cos(2\pi f_e t)$

La frequence du signal $f_s = f_e$, on prélève toujours la même valeur de e_0, $e_n = e_0$

Si $e_0 = 0$ on a $s_n = 0$ (1er cas)

si $e_0 \neq 0$ on a $s_n = e_0$ (2° cas)

6- Il faut simplement assurer la condition de SHANNON et ~~mieux~~ même faire mieux avec $f_e \gg f_s$

EXO 3

1. interrupteur ouvert $\varepsilon_n = 0$ $i_n = \frac{0}{R_n} = 0$

interrupteur fermé $\varepsilon_n = E$ $i_n = \frac{E}{R_n} = \frac{2^n E}{R}$

D'où $\boxed{i_n = \frac{\varepsilon_n 2^n E}{R}}$

2) $i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = \frac{E}{R} \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n$

$U_g = R'i = \frac{R'E}{R} \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n$ tant que $U_s < V_{sat}$

$R' = R$ $\Rightarrow \boxed{U_g = E \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n}$ $E = 1V$

$U_g = \sum_{n=0}^{3} \varepsilon_n 2^n$ $U_g < V_{sat}$

Code d'entrée	valeur décimal de la tension de sor...
0000	0 V
0010	2 V
0001	1 V
0011	3 V
0100	4 V

$U_g = \varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots$

$U_{s\,max}$ correspond au code 1111

$U_{s\,max} = U_{g\,max} = 1 + 2 + 4 + 8 = 15\,V$

Il est préférable de choisir les valeurs des composants de sorte à ce que la tension de sortie demandée soit strictement inférieur à V_{sat}

3- Avec un échantillonnage à 16 bits, le convertisseur aura besoin de 16 resistances en parallèles.

La valeur maximale est 1111111111111111 soit en binaire $\sum_{n=0}^{15} 2^n = \frac{2^{16}-1}{2-1} = 2^{16}-1 = 65535$ (suite géometrique raison 2)

c'est evidemment une tension qui dépasse la tension de saturation en sortie.

Solution

Pour eviter ce problème, il faut que la plus grande tension demandée en sortie reste inferieur à V_{sat}

soit $U_s = U_g = (2^{16}-1)\, E \frac{R'}{R} < V_{sat}$

$$\boxed{E\,\frac{R'}{R} < \frac{V_{sat}}{65535}}$$

on peut agir sur E, R ou R'

3) $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_a} \leq \frac{f_2 - f_1}{2}$

$\frac{1}{T_a} \leq 10 \Rightarrow T_a \geq 0{,}1\,s$

$T_{a\,min} = 0{,}1\,s$

$\frac{f_e}{N} = \frac{1}{T_a} \Rightarrow N = f_e T_a \Rightarrow N_{min} = f_e T_{a\,min}$

$N_{min} = 2020 \times 0{,}1 = 202.$

$f_e \geq 2 f_{max}$

$f_e T_a \geq 0{,}2 f_{max} \Rightarrow N \geq 0{,}2 f_{max}$

$N \geq 202 \Rightarrow N_{min} = 202.$

4) $b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{(2p+1)^2}$ $b_{2p+1} \leq 0{,}01\, b_1$

b_{2p+1}, $b_1 = \frac{4A}{\pi}$ negligée devant b_1 si $\longrightarrow$ $\frac{1}{(2p+1)^2} < 10^{-2} \Rightarrow 100 < (2p+1)^2$

$10 < 2p+1 \Rightarrow 4{,}5 < p$

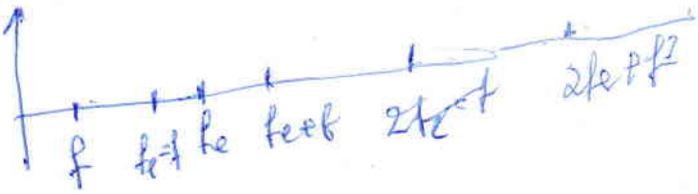
A partir de $p = 5$, les amplitudes des harmoniques sont négligées devant b_1. $n = 1, 3, 5, 7, 9$

Les amplitudes non négligées sont, $p = 0, 1, 2, 3, 4.$

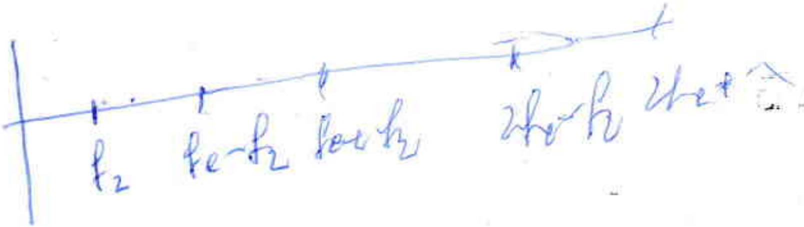
de fréquence 1000 Hz, 3000 Hz, 5000 Hz, 7000 Hz, 9000 Hz

$f_e \geq 18\ kHz.$

5) fondamental : $n = 1$
$n = 1$

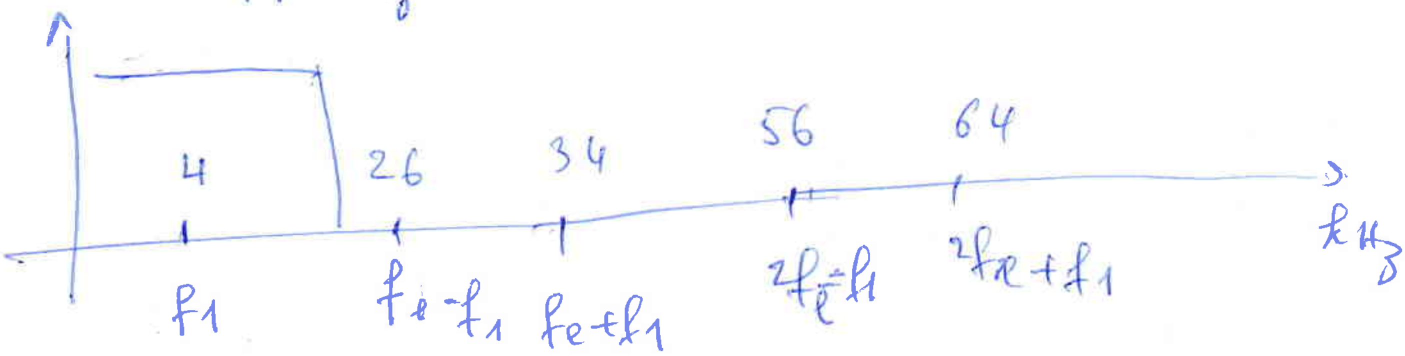


$n = 3$ ou $3f = f_2$

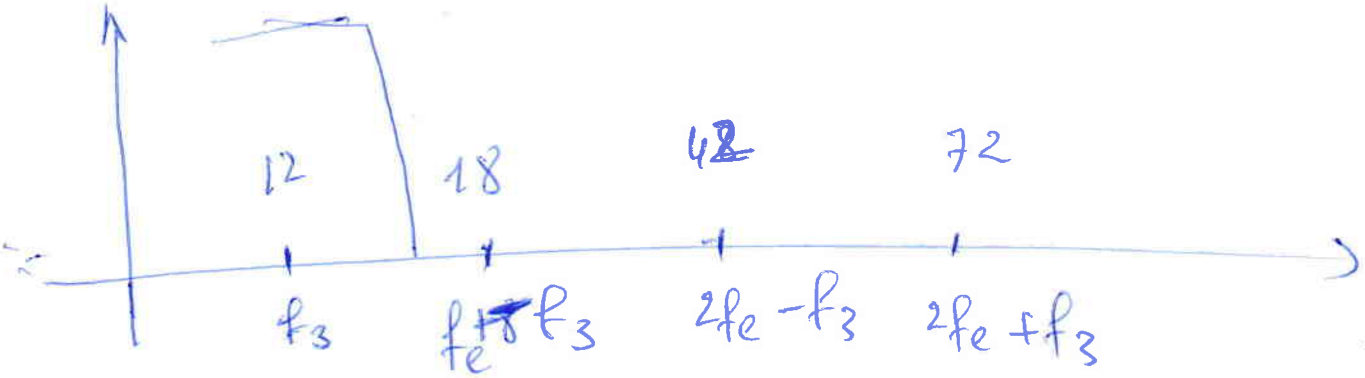


$n = 2p+1$

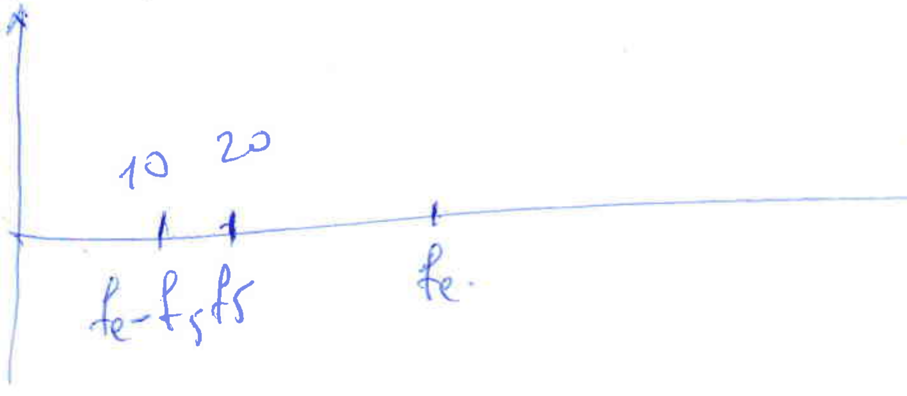
$n = 1 \quad f_1 = f_0 = 4\ kHz$



$n = 3 \quad f_3 = 3f_0 = 12\ kHz$



$n = 5 \quad f_5 = 5f_0 = 20\ kHz$



on ne peut plus récupérer le signal f_5